Université Abdelmalek Essaadi, ENSA Al Hoceima
Première année, AP1, Année universitaire 2018-2019
- Algèbre I-
Younes Abouelhanoue

TD3 : Variables Anneaux et Corps

Exercice 1

On définit sur $\mathbb{Z}^2$ **deux lois de compositions internes notées** $+$ **et** $*$ **par :**

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d) \quad \textbf{et} \quad (a,b)*(c,d)=(ac,ad+bc)$$

1/ Montrer que $(\mathbb{Z}^2,+,*)$ **est un anneau commutatif.**

2/ Montrer que $A=\{(a,0)\ /\ a\in\mathbb{Z}\}$ **est un sous anneau de** $(\mathbb{Z}^2,+,*)$.

Exercice 2

Pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ **, on pose**

$$aTb=a+b-1 \quad \textbf{et} \quad a*b=ab-a-b+2$$

Montrer que $(\mathbb{R},T,*)$ **est un corps.**

Exercice 3

Soit A **un anneau, On dit qu'un élément** a **de** A **est nilpotent s'il existe** $k\in\mathbb{N}$ **tel que** $a^k=0$

1/ Montrer que si a **et** b **sont nilpotents et que** $ab=ba$ **alors** $a+b$ **et nilpotent.**

2/ Montrer que si b **est nilpotent et** $a\in A$ **tel que** $ab=ba$ **alors** ab **est nilpotent.**

3/ Montrer que si a **est nilpotent alors** $1-a$ **est inversible.**

Exercice 4

Soit $(A,+,.)$ **un anneau commutatif et** E **une patie non vide tel que**

$$I(E)=\{a\in A\ /\ \forall x\in E \text{ on a } ax=0\}$$

Montrer que I(E) est un ideal de $(A,+,.)$.

Exercice 5

On munit l'ensemble A **de deux lois**

$$a\oplus b=a+b+1 \quad \textbf{et} \quad a\otimes b=a.b+a+b$$

1/ Montrer que $(A,\oplus,\otimes)$ **est un anneau**

2/ Montrer que l'applictaion $f:(A,+,.)\to(A,\oplus,\otimes)$ **définie par** $f(a)=a-1$ **est un isomorphisme d'anneaux.**